Calculus of variations

Euler–Lagrange equation

오일러-라그랑주 방정식은 함수 q의 함수인 범함수 S를 최소나 최대로 하는 함수 $q\left(t\right)$를 찾기 위한 것이다. 여기서 S는

\begin{displaymath} \displaystyle S(q) = \int_a^b L(t,q(t),q'(t))\, \mathrm{d}t \end{displaymath}

이다. 여기서:

- q 는 구하고자 하는 함수이며, 다음과 같은 성질을 만족한다:

\begin{displaymath} \begin{align} q \colon [a, b] \subset \mathbb{R} & \to X \\ t & \mapsto x = q(t) \end{align} \end{displaymath}

여기서 q 는 미분 가능한 함수고, $q\left(a\right) = x_a, q\left(b\right) = x_b$로 정해져 있다.

- q' 는 q를 미분한 함수이다.

오일러-라그랑주 방정식의 증명

1차원 오일러-라그랑주 방정식 유도는 수학에서 고전으로 꼽힌다. 이 증명의 근거는 변분법의 기본정리이다.

함수 f 가, 경계값 조건 $f\left(a\right) = c, f\left(b\right) = d$를 만족하고, 다음과 같이 주어지는 범함수 J 를 최대 또는 최소로 만든다고 하자.

\begin{displaymath} J = \int_a^b F(x,f(x),f'(x))\, dx. \,\! \end{displaymath}

여기서 F가 연속적인 편미분값을 가진다고 가정한다. (가정을 더 약하게 잡을 수도 있으나, 그러면 증명이 더 복잡해진다.)

만일 f가 상대 범함수를 최대, 최소로 한다고 하면, f에 매우 작은 변화를 가했을 때, J의 값이 늘거나(f가 J를 최소화할때) J의 값이 줄 수 있다.(f가 J를 최대화할때)

여기서 f에 매우 작은 변화를 준 함수 $g_\epsilon\left(x\right) = f\left(x\right)+\epsilon\eta\left(x\right)$를 도입하자. 여기서 $\eta\left(x\right)$ 는 $\eta\left(a\right) = \eta\left(b\right) = 0$ 를 만족하는 미분가능한 함수이다. 이제, f 대신 g 를 넣은 J는 다음과 같은 함수가 될 것이다.

\begin{displaymath} J(\epsilon) = \int_a^b F(x,g_\epsilon(x), g_\varepsilon'(x))\, dx. \,\! \end{displaymath}

이제 J 를 ϵ 에 대해 미분한 전미분을 구하면,

\begin{displaymath} \frac{\mathrm{d} J}{\mathrm{d} \varepsilon} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\epsilon}(x,g_\varepsilon(x), g_\varepsilon'(x))\, dx. \end{displaymath}

전미분의 정의에서 다음과 같은 식이 나오며,

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\epsilon} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial g_\varepsilon}\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial g'_\varepsilon}\frac{\partial g'_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \eta(x) \frac{\partial F}{\partial g_\varepsilon} + \eta'(x) \frac{\partial F}{\partial g_\varepsilon'}.$$

그러므로

$$\frac{\mathrm{d} J}{\mathrm{d} \epsilon} = \int_a^b \left[\eta(x) \frac{\partial F}{\partial g_\varepsilon} + \eta'(x) \frac{\partial F}{\partial g_\varepsilon'} \, \right]\,dx.$$

만약 $\epsilon = 0$ 이 되면 $g_\epsilon = f$이고, f 가 J를 극값으로 만드는 부분이므로, $J'\left(0\right) = 0$, 일 것이다. 수식으로 쓰면,

$$J'(0) = \int_a^b \left[\eta(x) \frac{\partial F}{\partial f} + \eta'(x) \frac{\partial F}{\partial f'} \,\right]\,dx = 0.$$

좀 더 정리하기 위해, 두 번째 항에 부분적분을 한다. 그러면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$0 = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right] \eta(x)\,dx + \left[\eta(x) \frac{\partial F}{\partial f'} \right]_a^b.$$

η에 대한 경계값 조건을 이용하면,

$$0 = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right] \eta(x)\,dx. \,\!$$

변분법의 기본정리를 적용하면, 다음과 같은 오일러-라그랑주 방정식을 얻는다.

$$0 = \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'}.$$

두 점을 지나는 가장 짧은 곡선

2차원 좌표평면상에 두 점 $\left(a, y_a\right)$와 $\left(b, y_b\right)$가 있다고 하자. 그렇다면 이 두 점을 연결하는 가장 짧은 곡선은 다음과 같은 범함수 L 를 최소로 만드는 곡선이다.

$$L\left[f\right] = \int_a^b \sqrt{1 + f'\left(x\right)^2}\, dx$$

여기서 f의 경우 두 점을 지나야 하므로 $f\left(a\right) = y_a, f\left(b\right)=y_b$를 만족하는 함수이다.

위에서 증명한 오일러-라그랑주 방정식을 적용하게 되면, 함수 f는

$$0 = -\frac{d}{dx}\frac{\partial }{\partial f'}\sqrt{1 + f'\left(x\right)^2}$$

를 만족하여야 한다. 식을 조금 정리해보면,

\begin{displaymath} \begin{matrix} 0 &=& \frac{d}{dx}\frac{\partial }{\partial f'}\sqrt{1 + f'\left(x\right)^2} \\ &=& \frac{d}{dx}\frac{f'\left(x\right)}{\sqrt{1 + f'\left(x\right)^2}} \end{matrix} \end{displaymath}

평균값 정리에 의해 미분해서 0이되는 함수는 그 구간에선 상수함수이므로,

\begin{displaymath} \frac{f'\left(x\right)}{\sqrt{1 + f'\left(x\right)^2}} = k \end{displaymath}

가 되고, 좌변의 분모를 양변에 곱한 후 양변을 제곱하여 정리하면 $f'\left(x\right)$에 대한 이차방정식이므로 다음과 같은 해를 얻을 수 있다.

\begin{displaymath} f'\left(x\right) = C \end{displaymath}

따라서 두 점 사이의 곡선중 길이가 최소인 곡선은 $f\left(x\right)=Cx + D$를 만족하는 직선이다.